

BİR BOYUTLU DOĞRUSAL OLMAYAN BİR ISI İLETİMİ PROBLEMİNİN VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ İLE ANALİZİ

Mehmet Tarık Atay¹ ve Safa Bozkurt Coşkun²

¹Matematik Bölümü, Niğde Üniversitesi, Niğde, Türkiye
ataymt@nigde.edu.tr

²İnşaat Mühendisliği Bölümü, Niğde Üniversitesi, Niğde, Türkiye
sbcoskun@nigde.edu.tr

ÖZET

Bu çalışmada durgun halde, doğrusal olmayan, bir boyutlu bir ısı iletimi problemi varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözülmüştür. Farklı mertebelerden doğrusal olmayan denklemler için sıcaklık dağılımları elde edilmiş ve sonuçlar aynı denklemlerin sonlu eleman analizinden elde edilen sonuçlarıyla karşılaştırılarak varyasyonel iterasyon yönteminin etkinliği test edilmiştir. Ayrıca hata analizi de yapılmış ve sonuçlar yöntemin doğrusal olmayan ısı iletimi problemlerinin çözümünde etkin bir yöntem olduğunu göstermiştir.

ABSTRACT

In this study, a one-dimensional steady-state heat conduction equation is solved using variational iteration method. Temperature distributions are obtained by means of the method for equations with different levels of nonlinearities and the method is tested by comparing obtained results with the finite element solutions of the same equations. In addition, error analysis is also conducted and the results have shown that variational iteration method is an efficient solution technique for the analysis of nonlinear heat conduction equation.

1. GİRİŞ

Isı iletimi problemleri ve uygulamaları çeşitli çalışmalarda geniş bir şekilde incelenmiştir [1]. Bir boyutlu ve doğrusal olmayan bir ısı iletimi problemi, boyutsuz formda aşağıdaki şekilde verilmiştir [2,3]:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} - N\theta^m = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

Probleme ait sınır şartları ise şöyle verilmektedir:

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(1) = 1 \quad (2)$$

burada türev boyutsuz koordinat x 'e göre alınmakta olup θ sıcaklığı göstermektedir. N ısı iletkenlik parametresi ve m ise ısı transferi modu olup, bunların farklı değerleri farklı fiziksel problemlere tekabül etmektedir [13].

Denklem (1) ve (2) m 'nin belirli değerleri için analitik çözümlere sahiptir [3,4,5,6,7,8]. Ancak [4]'de verilmekte olan çözüm üç parametrelili hipergeometrik çözüm, [3]'de verilen çözüm ise Dawson integrali içermektedir.

Bu tip problemler daha önce Taylor dönüşümü [9], diferansiyel dönüşüm yöntemi [10] ve Adomian dekompozisyon yöntemi ile çözülmüştür [11,12,13].

Son zamanlarda varyasyonel iterasyon yöntemi adı verilen varyasyonel tabanlı analitik bir çözüm tekniği doğrusal olmayan diferansiyel denklemler veya denklem sistemleri içeren problemlere başarı ile uygulanmaktadır. [14,15,16]. Yöntemin en önemli avantajı çözüm için doğrudan analitik bir ifade vermesidir. Domain dekompozisyon yöntemine göre kıyaslandığında ise gerek formülasyon ve gerekse çözüm aşamalarında daha kolaylıkla uygulanabilir bir yöntemdir. Bu nedenle doğrusal olmayan diferansiyel denklemler içeren mühendislik problemlerinin çözümünde etkin bir şekilde kullanılabilir

Bu çalışmada bir boyutlu, doğrusal olmayan, boyutsuz bir ısı iletim problemi varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözülmüştür. Analizde Denklem (1)'de doğrusal olmama mertebesini etkilediği düşünülen N ve m parametrelerinin çözüme etkileri incelenmiştir. Elde edilen sonuçları test etmek için Denklem (1)'in sonlu eleman yöntemi ile çözümü de yapılmıştır. Bu analiz için FlexPDE ver.5 kullanılmıştır. Sonlu eleman sonuçlarına bağlı olarak varyasyonel iterasyon yönteminden elde edilen sonuçlar için hata analizi de yapılmıştır. Hata analizi için, tüm varyasyonel iterasyon çözümlerinde dördüncü iterasyon sonunda elde edilen çözümler kullanılmıştır.

2. VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ

Bu yönteme göre, aşağıdaki diferansiyel denklem ele alınabilir:

$$Lu + Nu = g(x) \quad (3)$$

burada L doğrusal operatör, N doğrusal olmayan operatör, ve $g(x)$ ise homojen olmayan bir terimdir. Varyasyonel iterasyon yöntemine göre doğru bir fonksiyonel şu şekilde yazılabilir:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \{Lu_n(\tau) + N\tilde{u}_n(\tau) - g(\tau)\} d\tau \quad (4)$$

burada λ genel Lagrange çarpanını, alt indis n iterasyon sırasını, \tilde{u} ise sınırlı varyasyonu, $\delta\tilde{u} = 0$ göstermektedir. Yöntemin uygulanması ile $\lambda(\xi)$ için alttaki denklem elde edilir:

$$\lambda''(\xi) = 0 \quad (5)$$

Denklemlerle ilgili sınır şartları ise aşağıdaki gibi elde edilirler.

$$\lambda(\xi)|_{\xi=x} = 0 \quad (6)$$

$$[1 - \lambda'(\xi)]|_{\xi=x} = 0 \quad (7)$$

Denklem (5)'in çözülmesi ile Lagrange çarpanı $\lambda(\xi)$ aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\lambda(\xi) = \xi - x \quad (8)$$

Varyasyonel iterasyon yönteminin Denklem (1)'e uygulanması ile aşağıdaki iterasyon formülü elde edilir.

$$\theta_{n+1}(x) = \theta_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi) \{\theta_n''(\xi) - N\tilde{\theta}_n^m(\xi)\} d\xi \quad (9)$$

Denklem (9)'da verilen iterasyon formülü aynı problemin Adomian dekompozisyon yöntemi ile çözümüyle kıyaslandığında çok daha basit bir ifadedir [14].

3. PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Varyasyonel iterasyon çözümünde başlangıç için sıcaklığın sabit olduğu varsayılmıştır. Aşağıda $N = 1$ ve $m = 2, 3, 4$ değerleri için yöntemden elde edilen analitik ifadeler verilmektedir.

$N = 1$, $m = 2$ için, ilk üç iterasyon:

$$\theta_0(x) = B \quad (10a)$$

$$\theta_1(x) = B + \frac{B^2 x^2}{2} \quad (10b)$$

$$\theta_2(x) = B + \frac{B^2 x^2}{2} + \frac{B^3 x^4}{12} + \frac{B^4 x^6}{120} \quad (10c)$$

$$\theta_3(x) = B + \frac{B^2 x^2}{2} + \frac{B^3 x^4}{12} + \frac{B^4 x^6}{72} + \frac{B^5 x^8}{560} + \frac{11B^6 x^{10}}{64800} + \frac{B^7 x^{12}}{95040} + \frac{B^8 x^{14}}{2620800} \quad (10d)$$

N = 1, m = 3 için, ilk üç iterasyon:

$$\theta_0(x) = B \quad (11a)$$

$$\theta_1(x) = B + \frac{B^3 x^2}{2} \quad (11b)$$

$$\theta_2(x) = B + \frac{B^3 x^2}{2} + \frac{B^5 x^4}{8} + \frac{B^7 x^6}{40} + \frac{B^9 x^8}{448} \quad (11c)$$

$$\theta_3(x) = B + \frac{B^3 x^2}{2} + \frac{B^5 x^4}{8} + \frac{3B^7 x^6}{80} + \frac{23B^9 x^8}{2240} + \frac{83B^{11} x^{10}}{33600} + \frac{101B^{13} x^{12}}{197120} + \dots \quad (11d)$$

N = 1, m = 4 için, ilk üç iterasyon:

$$\theta_0(x) = B \quad (12a)$$

$$\theta_1(x) = B + \frac{B^4 x^2}{2} \quad (12b)$$

$$\theta_2(x) = B + \frac{B^4 x^2}{2} + \frac{B^7 x^4}{6} + \frac{B^{10} x^6}{20} + \frac{B^{13} x^8}{112} + \frac{B^{16} x^{10}}{1440} \quad (12c)$$

$$\theta_3(x) = B + \frac{B^4 x^2}{2} + \frac{B^7 x^4}{6} + \frac{13B^{10} x^6}{180} + \frac{17B^{13} x^8}{560} + \frac{1789B^{16} x^{10}}{151200} + \frac{701B^{19} x^{12}}{166320} + \dots \quad (12d)$$

Analiz N = 0.1, 1, 5 ve her bir N için m = 2, 3, 4 alınarak gerçekleştirilmiştir. Çözüm için dördüncü itersyon sonucu elde edilmiş olan ifade ($\theta_4(x)$) kullanılmıştır. Bu parametreler yardımıyla dördüncü iterasyon sonucu elde edilen çözümün farklı mertebelerden doğrusal olmama durumları için ne kadar hassas olduğu araştırılmıştır. Bu amaçla, elde edilmiş olan dördüncü iterasyon sonuçları, aynı denklemlerin Flex PDE ver.5 kullanılarak elde edilmiş olan sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırılarak, Denklem (13)'de verilmekte olan hata kriteri yardımıyla hata analizleri gerçekleştirilmiştir.

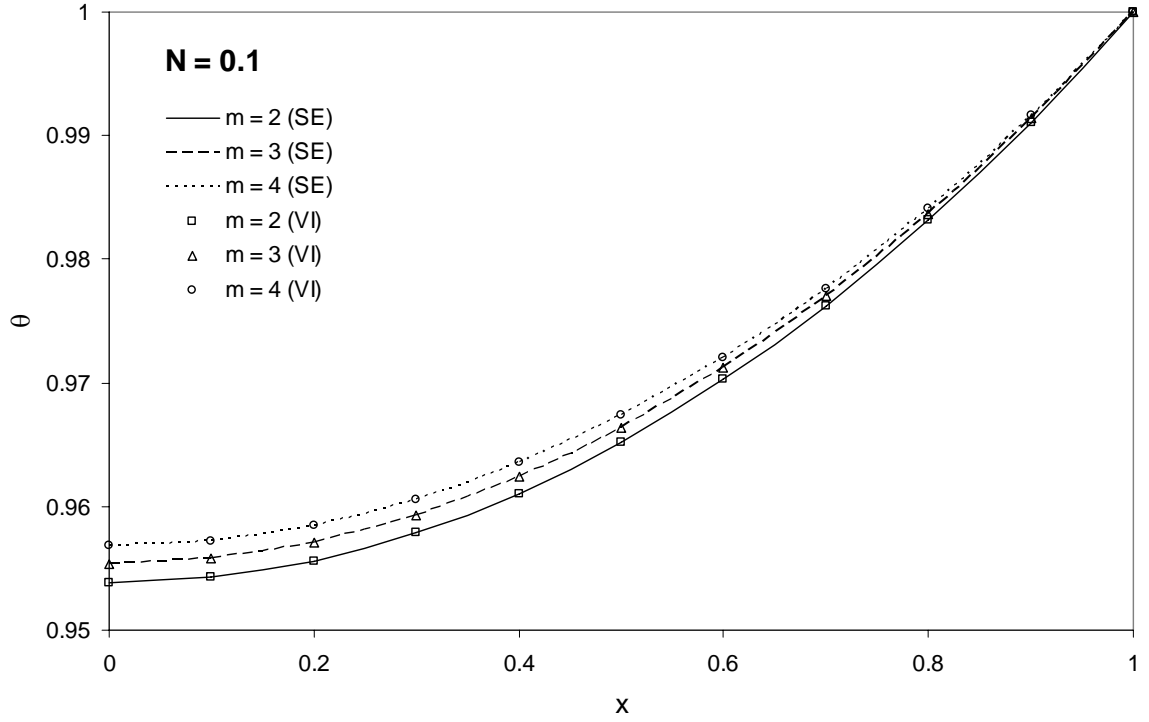
$$\text{Hata} = \left(\frac{\sum_{I=1}^n |\theta_{SE} - \theta_{VI}|^2}{\sum_{I=1}^n |\theta_{SE}|^2} \right)^{1/2} \quad (13)$$

burada θ_{SE} sonlu eleman çözümü, θ_{VI} dördüncü iterasyon sonucunda elde edilmiş olan varyasyonel iterasyon çözümü ve n çözüm elde edilen nokta sayısıdır.

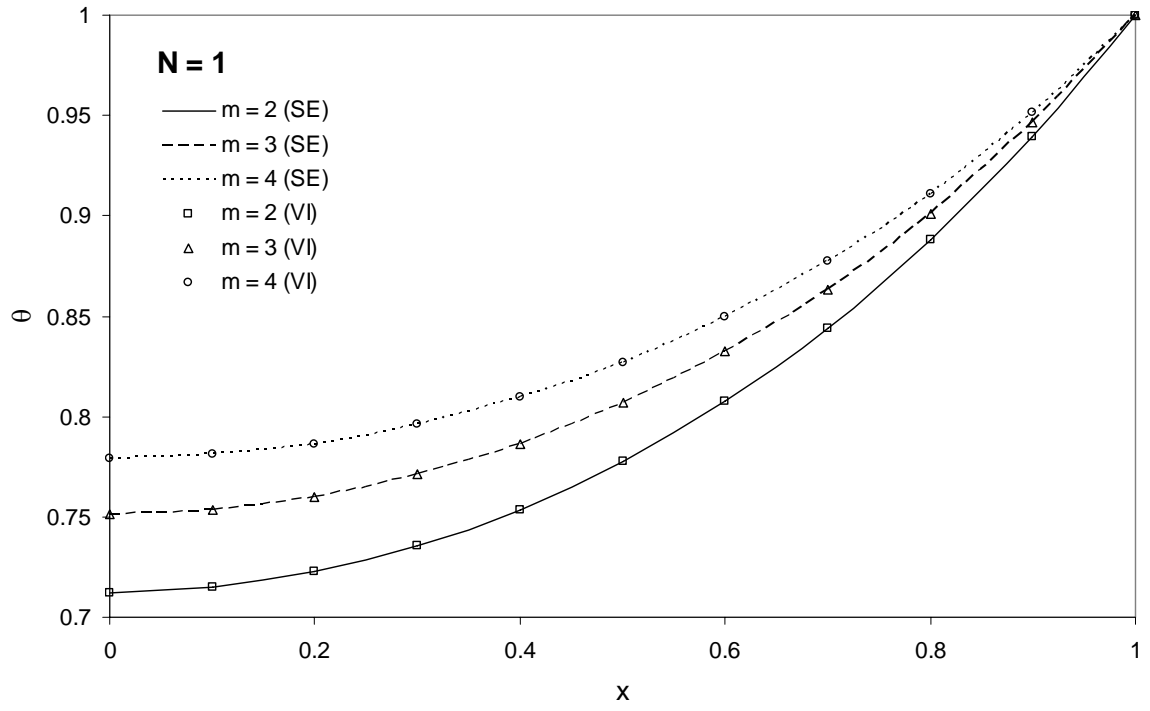
4. SAYISAL SONUÇLAR

Önerilen çözüm tekniği N ve m parametrelerinin farklı değerleri için Denklem (1)'e uygulanmıştır. Elde edilen sonuçlar grafik olarak Şekil 1-3 arasında görülmektedir. Bu sonuçlardan varyasyonel iterasyon yöntemi ile elde edilen dördüncü iterasyon çözümlerinin

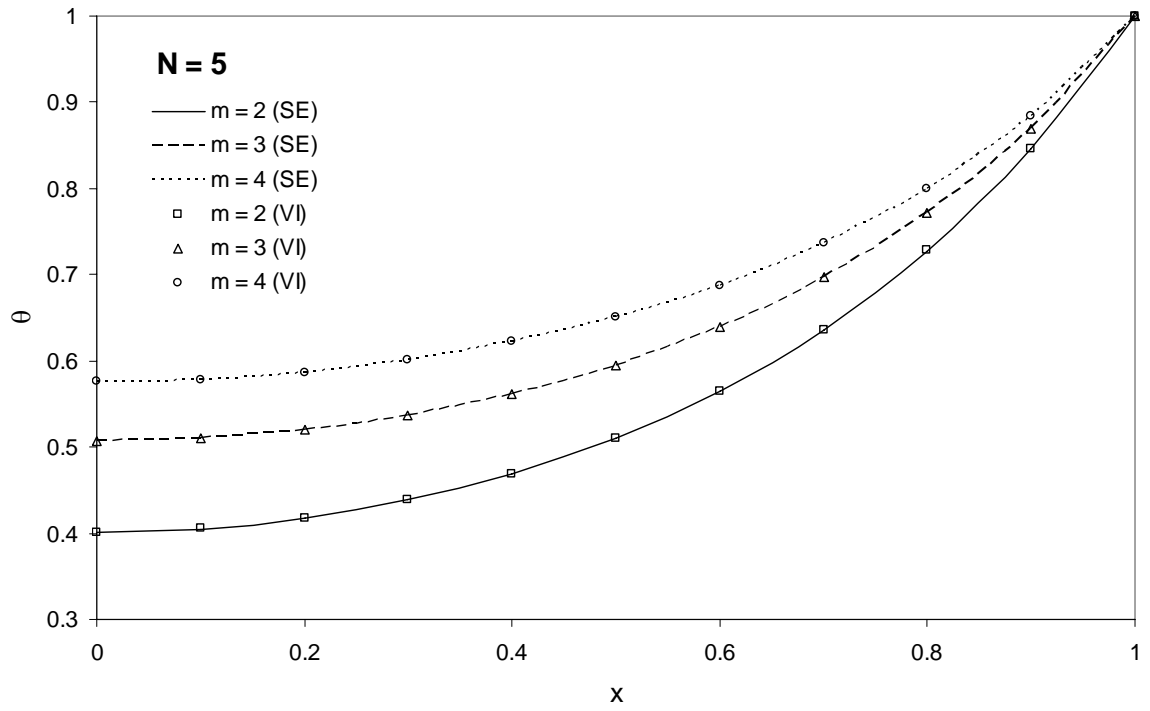
sonlu eleman çözümleri ile iyi bir uyum içerisinde olduğu söylenebilir. Ancak grafiklerde belirgin olmamakla birlikte, N ve m parametrelerinin artan değerleri ile çözümlerdeki hata da artmaktadır. Bununla birlikte hatanın artmasına rağmen, sonuçlar iyi bir uyum içerisinde olmayı sürdürmektedirler. N ve m parametrelerine bağlı olarak hatanın nasıl değiştiği ise Şekil 4-5’de görülmektedir. Buradan da gözlemlenebileceği gibi, hata, N ve m ’nin artan değerleriyle birlikte 10^{-8} - 10^{-4} mertebeleri arasında değişmektedir.



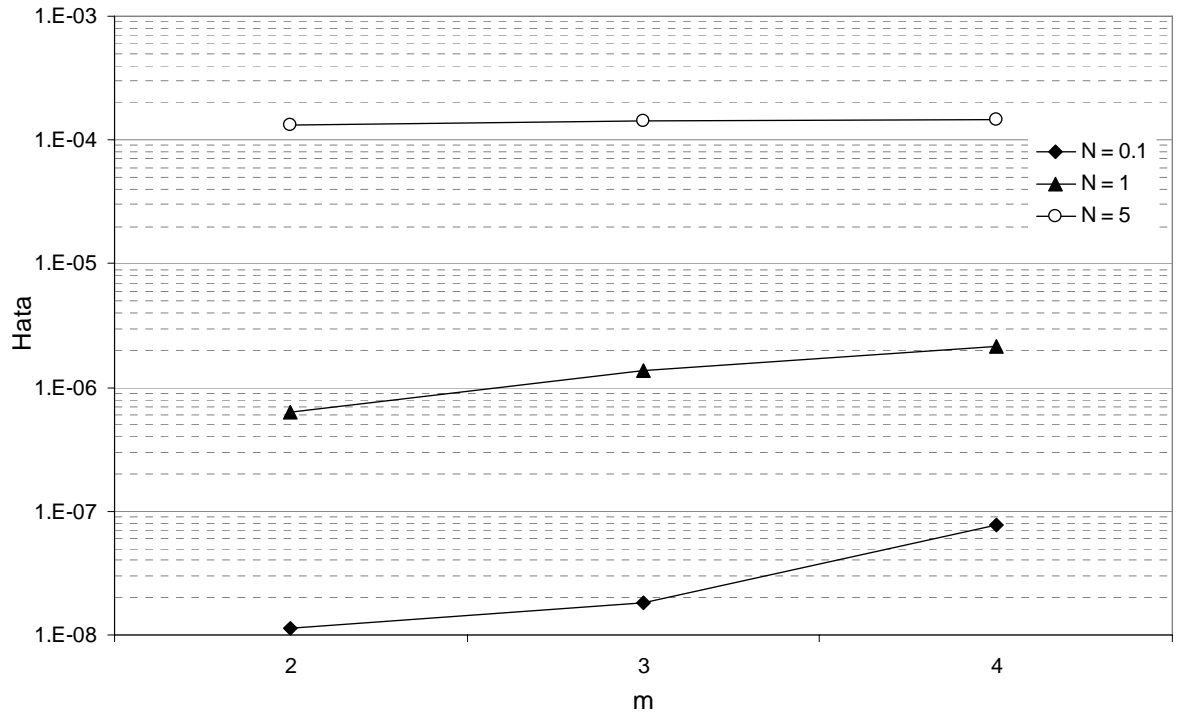
Şekil 1. Sıcaklık dağılımı ($N = 0.1$)



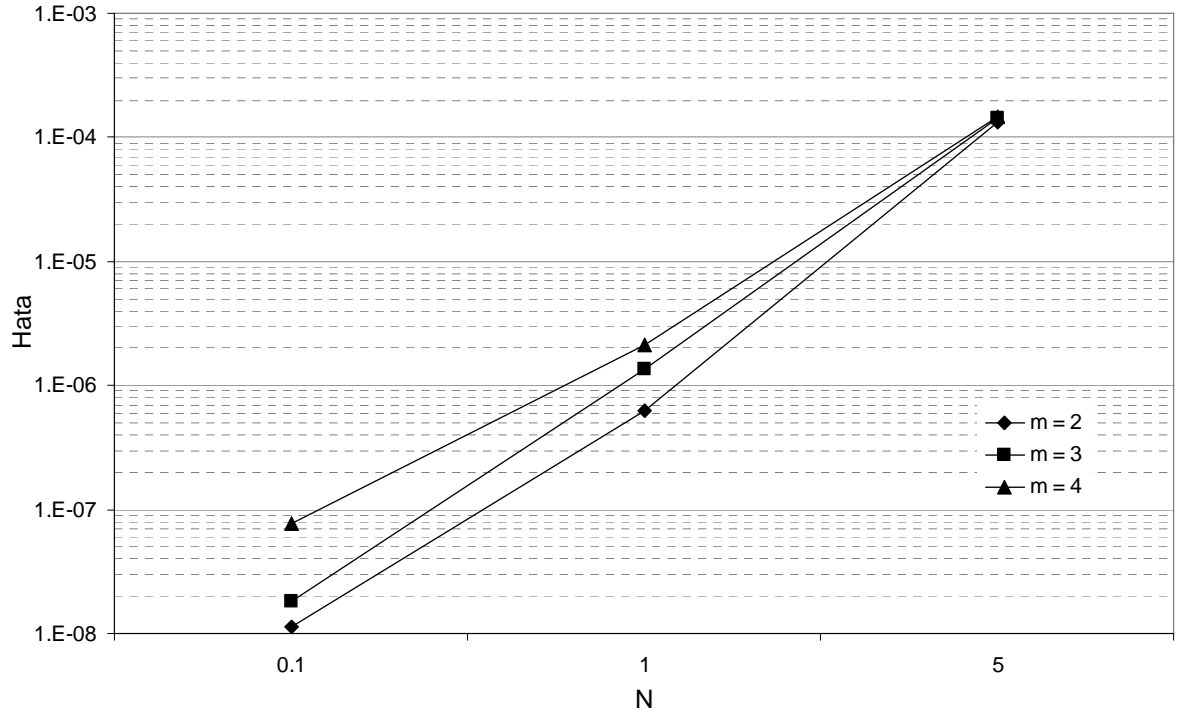
Şekil 2. Sıcaklık dağılımı ($N = 1$)



Şekil 3. Sıcaklık dağılımı ($N = 5$)



Şekil 4. Isı transfer modu (m)'na bağlı olarak farklı N değerleri için hatanın değişimi



Şekil 5. Isı iletkenlik parametresi (N)'ne bağlı olarak farklı m değerleri için hatanın değişimi

5. SONUÇLARIN İRDELENMESİ

Bu çalışmada bir boyutlu, doğrusal olmayan, boyutsuz bir ısı iletim problemi varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözülmüştür. Analizde denklemin doğrusal olmama mertebesi etkilediği düşünülen N ve m parametrelerinin çözüme etkileri de incelenmiştir. Elde edilen sonuçları test etmek için kullanılan sonlu eleman sonuçlarına bağlı olarak varyasyonel iterasyon yönteminden elde edilen sonuçlar için hata analizi de yapılmıştır. Hata analizi için, tüm varyasyonel iterasyon çözümlerinde dördüncü iterasyon sonunda elde edilen çözümler kullanılmıştır.

Denklemin doğrusal olmama mertebesinin artışına göre iterasyon sayısı artırılarak çözüm hassasiyeti artırılabilir. Ayrıca, incelenen durumlarda dördüncü iterasyon sonucu elde edilen çözümün, incelenen en üst seviyede doğrusal olmama durumunda bile 10^{-4} mertebesinde bir hata meydana getirdiği, bunun da sonuçların kıyaslandığı Şekil 1-3 arasında yer alan grafiklerde belirgin bir farklılığa yol açmadığı görülmüştür.

Ayrıca, doğrusal olmayan θ^m terimi ile doğrusal olarak çarpılan ısı iletkenlik katsayısının da (N), m 'nin sabit bir değeri için, çözümde meydana gelen hatayı önemli ölçüde etkilediği görülmüştür.

Sonuçlar varyasyonel iterasyon yönteminin incelenen durumlarda dördüncü iterasyonda bile hassas olduğunu göstermiştir. Buna göre, yöntemin doğrusal olmayan ısı iletimi problemlerinin çözümünde etkin bir şekilde kullanılabileceği söylenebilir.

6. KAYNAKLAR

- [1] Q.D. Kern and D.A. Kraus, Extended Surface Heat Transfer, McGraw- Hill, NewYork(1972)
- [2] Y.M. Chang, C.K. Chan and J.W. Cleaver, ASME J. Heat transfer 104, 813 (1982).
- [3] S.P. Liaw and R.H. Yeh, Int. J. Heat Mass Transfer 37, 1509 (1994)
- [4] A.K. Sen and S. Trinh, ASME J. Heat Transfer 108, 457 (1986)
- [5] S.P. Liaw R. H. Lieh , Int. J. Heat Mass Transfer 37, 1517 (1994)
- [6] B. M. Mehta and A. Aris, J. Math. Anal. Appl., 36, 611 (1971)
- [7] B. M. Mehta and A. Aris, Chem. Eng. Sci., 26, 1699 (1971)
- [8] F. S. Lai and Y. Y. Hsu, AIChE J., 13, 817 (1967)
- [9] L.T. Yu, C. K. Chen, Journal of the Franklin Institute 336B (1999) 77.
- [10] L.T. Yu, C. K. Chen, Applied Mathematical Modelling 22 (1998) 11.
- [11] C.H. Chiu, C.K. Chen, Acta Mechanica 157 (2002) 147.
- [12] C. Arslantürk, Applied Thermal Engineering 26 (2006) 1149.
- [13] D. Lesnic, P.J. Heggs, International Communications in Heat and Mass Transfer 31 (2004) 673.
- [14] J.H. He, International Journal of Nonlinear Mechanics, 34 (1999) 699.
- [15] M.A. Abdou, A.A. Soliman, , Physica D, 211 (2005) 1.
- [16] S. Momani, S. Abuasad, Z. Odibat, , Appl. Math. Comput., 177 (2006) *published online*.